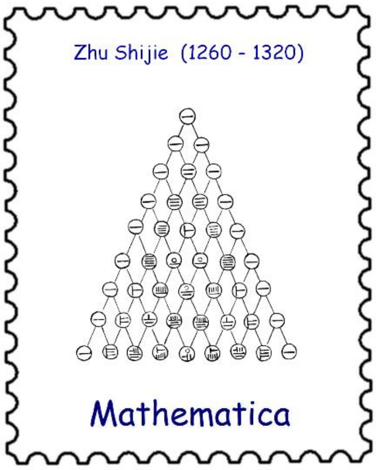
November 2022

Vor über 700 Jahren lebte **Zhu Shijie** (1260 – 1320)



Trotz der wechselhaften Geschichte Chinas unter der Herrschaft verschiedener Dynastien blieben die mathematischen Anforderungen für die Beamtenprüfungen über die Jahrhunderte hinweg nahezu unverändert – so wie sie Liu Hui (220-280) in seinem Buch *Jiuzhang suanshu* (Neun Kapitel mathematischer Kunst) beschrieben hatte. Nach langen Jahren bürgerkriegsähnlicher Zuständen sorgte Kublai Khan, Enkel Dschingis Khans, wieder für sichere Lebensverhältnisse in China – seine Heere hatten das gewaltige Reich erobert und 1279 um die Hauptstadt Dadu (heute Beijing) herum eine Stadtmauer errichtet.

So konnte auch der Gelehrte Zhu Shijie, der in der Nähe von Dadu geboren wurde, wieder ungehindert durch das Land reisen – mehr als zwanzig Jahre lang. Sein Ruhm verbreitete sich im gesamten Reich und viele kamen zu ihm, um von ihm zu lernen.

Sein für Anfänger gedachtes Buch *Suanxue qimeng* (Einführung in mathematische Studien, 1299) ging an manchen Stellen über die Inhalte der oben erwähnten *Neun Kapitel mathematischer Kunst* hinaus, beispielsweise indem auch das Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen behandelt wurde. Für die Lösung von linearen Gleichungssystemen gab Zhu Shijie Empfehlungen zur Auswahl einer geeigneten Zeile, die festgehalten werden sollte (sog. *Pivotisierung*), und für die Lösung von Polynomialgleichungen wandte er – wie sein Vorgänger Qin Jiushao – eine Methode an, die wir heute als Horner-Schema bezeichnen. Zhu Shijies Originalwerk ging verloren, es konnte jedoch im 19. Jahrhundert aus einem gedruckten koreanischen Exemplar aus dem 15. Jahrhundert rekonstruiert werden.

Der Höhepunkt der mathematischen Entwicklung in China wurde im Jahr 1303 mit Zhu Shijies Buch *Siyuan yujian* (Kostbarer Spiegel der vier Elemente) erreicht. Auch von diesem Buch existiert keine Originalfassung – die heute vorliegende Fassung enthält sieben Vorworte, sodass man nicht mehr weiß, was von Zhu Shijie selbst veröffentlicht wurde.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Auf einer der ersten Seiten des Buchs findet man die Abbildung des Dreiecks, das heute PASCALs Namen trägt. Die im Diagramm eingetragenen Binomialkoeffizienten entsprechen (teilweise) der üblichen Darstellung von Zahlen durch Rechenstäbchen.

ZHU SHIJIE verweist darauf, dass nicht er dieses Schema erfunden hat, sondern dass dies eine *altbekannte* Methode sei, womit er sich vermutlich auf ein Buch von JIA XIAN (1010-1070) bezieht.

Mithilfe der Koeffizienten aus der letzten Zeile der abgebildeten Figur kann man die achte Potenz einer Summe wie folgt notieren:

$$(a+b)^8 = 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8$$

Dann geht ZHU SHIJIE auf die Behandlung von Aufgaben ein, für die bis zu vier Variablen benötigt werden (*tian* = Himmel, *di* = Erde, *ren* = Mensch, *wu* = Materie) – wir werden im Folgenden die bei uns üblichen Variablen x, y, z, u verwenden. Die in den Rechnungen auftretenden Koeffizienten werden in Tabellenform angeordnet, beispielsweise wird der Term $2y^3 - 8y^2 + 28y - xy^2 + 6xy - 2x - x^2$ durch das rechts stehende Schema erfasst.

	y^3	y^2	y	
	2	-8	28	
x	0	-1	6	-2
x^2	0	0	0	-1

Am Beispiel der folgenden Aufgabe wird deutlich, wie ZHU SHIJIE seine *Methode der himmlischen Elemente* entfaltet:

Ein rechtwinkliges Dreieck hat den Flächeninhalt 30. Die Summe der Längen der beiden Katheten beträgt 17. Wie groß ist die Summe der Längen der Basis (= kürzere Kathete) und der Hypotenuse?

Lösung: Bezeichnet man die Katheten mit x und y, die Hypotenuse mit z, dann gilt also: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y = 30 \wedge x + y = 17$. Hieraus ergibt sich $x \cdot (17 - x) = 60$, d. h. $x^2 - 17x = -60$. Lösen der quadratischen Gleichung liefert $x = 5 \vee x = 12$. Die kürzere Kathete hat die Länge 5. Die Länge der Hypotenuse ist somit $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, für die gesuchte Summe gilt dann $x + z = 5 + 13 = 18$.

ZHU SHIJIE begnügt sich jedoch nicht damit, eine quadratische Gleichung zu lösen; vielmehr zeigt er, wie man das konkrete Problem in einem allgemeineren Zusammenhang untersuchen kann: Für x, y, z gilt jedenfalls (PYTHAGORAS): $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Setzt man für die gesuchte Größe $x + z = t$, dann folgt wegen $z = t - x$ und $y = 17 - x$, dass gilt: $x^2 + (17 - x)^2 - (x - t)^2 = 0$, also $x^2 + 289 - 34x + 2xt - t^2 = 0$. Wegen $x^2 - 17x = -60$, d. h. $x^2 = 17x - 60$ ergibt sich eine lineare Gleichung mit der Variablen x, nämlich $17x - 60 + 289 - 34x + 2xt - t^2 = 0$, also $229 - 17x + 2xt - t^2 = 0$, d. h., x erfüllt die Bedingung $x = \frac{229 - t^2}{17 - 2t}$. Setzt man dies in die quadratische Gleichung ein, so erhält man

$\left(\frac{229-t^2}{17-2t}\right)^2 + 289 - 34 \cdot \frac{229-t^2}{17-2t} + 2 \cdot \frac{229-t^2}{17-2t} \cdot t - t^2 = 0$ und hieraus umgeformt

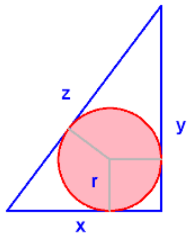
$$(229 - t^2)^2 + 289 \cdot (17 - 2t)^2 - 34 \cdot (229 - t^2) \cdot (17 - 2t) + 2t \cdot (229 - t^2) \cdot (17 - 2t) - t^2 \cdot (17 - 2t)^2 = 0$$

und somit schließlich eine Gleichung 4. Grades: $t^4 - 34t^3 + 71t^2 + 3706t + 3600 = 0$.

Diese Gleichung besitzt vier Lösungen, nämlich -8, -1, 18 und 25, darunter die eigentlich gesuchte Summe $t = x + z = 5 + 13 = 18$. (Die übrigen Lösungen ergeben sich im Sachzusammenhang wie folgt: -8 ergibt sich als Lösung für t, wenn man $x = 5$ und $z = -13$ einsetzt; -1 für $x = 12$ und $z = -13$; 25 für $x = 12$ und $z = 13$.)

In einer weiteren Aufgabe heißt es:

Die drei Seiten x, y, z eines rechtwinkligen Dreiecks erfüllen die Bedingungen $2yz = z^2 + xz \wedge 2x + 4y + 4z = x \cdot (y^2 - z + x)$.
Gesucht ist $u = x + y + z + d = 2x + 2y$.



Die Variable d steht für den Durchmesser des Inkreises; hierfür gilt: $d = 2r = x + y - z$, wie bereits in *Jiuzhang suanshu* angegeben wurde.

Als Lösung gibt ZHU SHIJIE an: $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ und $u = 14$.

Das folgende Problem führt ZHU SHIJIE auf eine Gleichung 5. Grades zurück:

Für drei Seiten x, y, z eines rechtwinkligen Dreiecks und den Durchmesser d des Inkreises gilt: $d \cdot x \cdot y = 24 \wedge x + z = 9$. *Gesucht ist y.* (Lösung: $y = 3$)

ZHU SHIJIE beherrscht verschiedene algebraische Methoden, wie er an zahlreichen Beispielen – auch bei Polynomen höheren Grades – demonstriert:

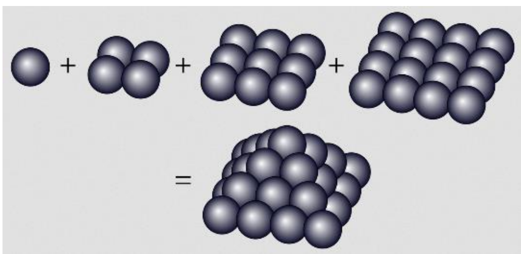
Um die quadratische Gleichung $-8x^2 + 578x - 3419 = 0$ zu lösen, wird zunächst die Variable substituiert: $x = \frac{y}{8}$.

Hiermit erhält man dann $-8 \cdot (\frac{y}{8})^2 + 578 \cdot \frac{y}{8} - 3419 = 0$, also $-\frac{1}{8} y^2 + \frac{578}{8} \cdot y - 3419 = 0$ und weiter $-y^2 + 578 \cdot y - 27352 = 0$. Eine Lösung dieser Gleichung ist $y = 526$ und somit ergibt sich $x = \frac{526}{8} = 65\frac{3}{4}$.

Bei der Gleichung $63x^2 - 740x - 432000 = 0$ findet er heraus, dass $x \approx 88$. Verschiebung um 88 (gemäß der sog. *fan fa*-Methode, die wir als HORNER-Methode bezeichnen) , also $63 \cdot (y + 88)^2 - 740 \cdot (y + 88) - 432000 = 0$, führt zur Gleichung $63y^2 + 10348y - 9248 = 0$, dann Substitution mit $y = \frac{z}{63}$ ergibt die Gleichung $z^2 + 10348z - 582624 = 0$. Diese hat die Lösung $z = 56$, also ist $y = \frac{56}{63} = \frac{8}{9}$ und somit $x = 88\frac{8}{9}$.

Bereits früh wandten chinesische Astronomen Näherungsmethoden an, um Gesetzmäßigkeiten für Planetenbewegungen herauszufinden. Mithilfe der sog. *chao ch'a*-Methode der fortgesetzten Differenzenbildung bestimmten sie geeignete Polynome.

Beispiel: Bildet man die Summenfolge der Quadratzahlen, dann erhält man die Folge der Pyramidalzahlen. Deren Glieder lauten also: 0, 1, 5, 14, 30, 55 usw.



Bildet man die Differenzenfolge (1. Ordnung) der Folge der Pyramidalzahlen, d. i. die Folge aus der Differenz benachbarter Folgenglieder, dann ergibt sich die Folge der Quadratzahlen selbst. Bildet man dann weitere Differenzenfolgen, so gelangt man nach der dritten Differenzbildung zu einer konstanten Folge. Die betrachtete Summenfolge $s(n)$ kann daher mithilfe eines Polynoms 3. Grades beschrieben werden: $s(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$, wobei offensichtlich $d = 0$. Durch Differenzbildung übereinanderstehender Gleichungen lassen sich die Koeffizienten leicht ermitteln:

n	0	1	2	3	4	5
a(*n*)	0	1	4	9	16	25
s(*n*)	0	1	5	14	30	55
Δ		1	4	9	16	25
Δ²		3	5	7	9	
Δ³			2	2	2	

$$\left|\begin{array}{c} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=5 \\ 27a+9b+3c+d=14 \\ 64a+16b+4c+d=30 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} 7a+3b+c=4 \\ 19a+5b+c=9 \\ 37a+7b+c=16 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} 12a+2b=5 \\ 18a+2b=7 \end{array}\right| \Rightarrow |6a=2|$$

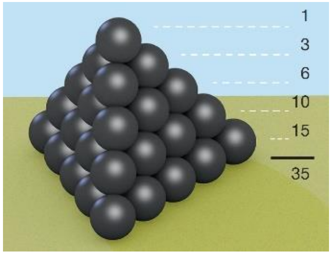
Und hiermit (rückwärts gehend) $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}$, d. h., es gilt:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n=\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1).$$

Entsprechend kann man die Formel für deren zugehörige Summenfolge gewinnen, also zur Folge $1, 6, 20, 50, \ldots$ Hier ergibt sich

$$1+5+14+30+\ldots+\tfrac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)=\tfrac{1}{24}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+2)$$ und weiter

$$1+6+20+50+\ldots+\tfrac{1}{24}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+2)$$
$$=\tfrac{1}{120}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(2n+3).$$



Eine besondere Rolle nehmen die Summenfolgen ein, die sich aus der Folge der natürlichen Zahlen, der Folge D_n der Dreieckszahlen (= Summenfolge der Folge der natürlichen Zahlen), der Folge T_n der Tetraederzahlen (= Summenfolge der Folge der Dreieckszahlen) usw. ergeben:

Bildet man nämlich die Summenfolge zur Folge $D_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$ der Dreieckszahlen, so ergibt sich die Folge der Tetraederzahlen 1, 4, 10, 20, 35, …, allgemein eine Folge mit der Folgenvorschrift $T_n=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$.

Diese Folgenvorschrift entdeckte ZHU SHIJIE vermutlich auch in dem o. a. Zahlendreieck, das in China bis heute als YANG HUI-Dreieck bezeichnet wird – nach dem chinesischen Mathematiker YANG HUI (1238-1298), der ebenfalls JIA XIAN als Entdecker nannte.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

350 Jahre nach ZHU SHIJIE beschrieb BLAISE PASCAL in seinem Buch über das *triangle arithmétique* u. a. diese Eigenschaft, die – als Beispiel – in der rechts stehenden Abbildung farbig hervorgehoben ist:

$$1+3+6+10=\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20,$$

d. h., die Summe der ersten vier Dreieckszahlen ist 20. Allgemein gilt:

$$1+3+6+10+\ldots+\tfrac{1}{2!}\cdot n\cdot(n+1)=\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n-1}=\binom{n+2}{n-1}=\tfrac{1}{3!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

Entsprechend findet man die zugehörige Summenfolge hierzu, also die Summenfolge mit den Gliedern 1, 5, 15, 35, 70, …, indem man die nächste Parallele im PASCAL'schen Dreieck betrachtet:

$$1+4+10+20+\ldots+\tfrac{1}{3!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\tfrac{1}{4!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$$ und weiter

$$1+5+15+35+\ldots+\tfrac{1}{4!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\tfrac{1}{5!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4),$$

$$1+6+21+56+\ldots+\tfrac{1}{5!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)=\tfrac{1}{6!}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)\cdot(n+5).$$